Ableitungsregeln

Konstantenregel

→ Die Ableitung einer Konstanten ist Null

→ $f(x) = 5$
$f'(x) = 0$

Potenz- und Faktorregel

→ „Potenz um 1 verringern und mit der Potenz mutiplizieren"

→ $f(x) = 2 \cdot x^3$
$f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{3-1} = 6x^2$

$f(x) = 5 \cdot x^{-2}$
$f'(x) = -2 \cdot 5 \cdot x^{-2-1} = -10x^{-3}$

Summenregel

→ Summe der Ableitungen einzelner Summanden

→ $f(x) = x^2 + 2x$
$f'(x) = 2x + 2$

Produktregel

→ Jeder Faktor mal die Ableitung des anderen Faktors und dann die Summe daraus

→ $f(x) = u(x) \cdot v(x)$
$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$

$f(x) = (x^3 - 1{,}5) \cdot (2x - x^2)$
$u(x) = x^3 - 1{,}5$ $\quad v(x) = 2x - x^2$
$u'(x) = 3x^2$ $\quad v'(x) = 2 - 2x$
$f'(x) = 3x^2 \cdot (2x - x^2) + (2 - 2x) \cdot (x^3 - 1{,}5)$

Kettenregel

→ Ableitung der äußeren mit der inneren als das Argument mal die Ableitung der inneren

→ $f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = v'(x) \cdot u'(v(x))$

$f(x) = \sin(x^2 - 1)$

$u(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = x^2 - 1$

$u'(x) = \cos(x)$ $\quad v'(x) = 2x$

$f'(x) = 2x \cdot \cos(x^2 - 1)$

Quotientenregel

→ $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{(v(x))^2}$

$f(x) = \frac{2}{x^3}$

$u(x) = 2$ $\quad v(x) = x^3$

$u'(x) = 0$ $\quad v'(x) = 3x^2$

$f'(x) = \frac{0 \cdot x^3 - 3x^2 \cdot 2}{(x^3)^2} = \frac{-6x^2}{x^6} = \frac{-6}{x^6}$

Logarithmus

für $\boxed{b^x = a}$ gilt $\boxed{x = \log_b(a)}$, wo $\boxed{a, b > 0 \quad b \neq 1}$

Logarithmen kürzen

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \log_b(c) \quad | b^{\wedge} \\ b^a = c \end{array}}$$

e-Funktion

e-Funktion (natürliche Exponentialfunktion)

$\boxed{f(x) = e^x}$ mit $\boxed{e \approx 2{,}718281}$. $\boxed{f(x) = f'(x)}$

Natürlicher Logarithmus

$\boxed{\log_e(x) = \ln(x)}$

Der Logarithmus zur Basis e heißt natürlicher Logarithmus.

$\boxed{e^{\ln(a)} = \ln(e^a) = a}$

Funktionsscharen

→ eine charakteristische Größe wird variabel gehalten

$\boxed{f_{\underline{v}}(x) = -\frac{10}{v^2} x^2 + x}$

→ beim Ableiten den Scharparameter wie eine konstante Zahl behandelt

→ Ortslinie: Funktion, auf der alle charakteristischen Punkte liegen (z.B. Extrempunkte)

- Koordinaten der Punkte bestimmen (in Abhängigkeit zum Scharparameter) $(\rightarrow \underline{EP(4t \mid -\frac{32}{3}t^3)})$
- x-Koordinate nach dem Parameter auflösen $(\underline{t = \frac{x}{4}})$
- in die y-Koordinate einsetzen $(\underbrace{y = -\frac{32}{3}\left(\frac{x}{4}\right)^3}_{\text{Ortskurve}})$

Symmetrieverhalten

y-Achsen-symmetrie

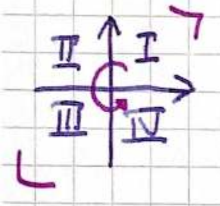
$\boxed{f(x) = f(-x)}$ (nur gerade Exponenten)

Punktsymmetrie zum Ursprung

$\boxed{f(x) = -f(-x)}$ (nur ungerade Exponenten)

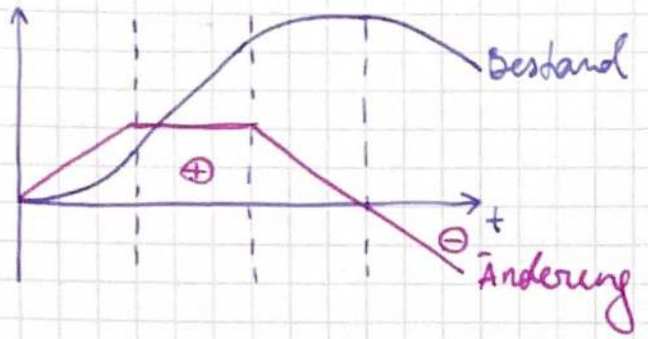
Umkehrfunktionen

$\boxed{f^{-1}(f(x)) = x}$ u. $\boxed{f(f^{-1}(x)) = x}$



- an der Ursprungsgeraden gespiegelt
- x und y vertauscht
- Definitionsmenge u. Wertemenge vertauscht
- es gibt nicht immer zur kompletten Funktion eine Umkehrfunktion (z.B. x^2)
- $f(x) = x$ $f^{-1}(x) = x$
- $f(x) = e^x$ $f^{-1}(x) = \ln(x)$
- $f(x) = \sin(x)$ $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$ + tan, cos gleich

Integralrechnung



← orientierte Flächeninhalte $\oplus, \ominus$

Integral bilden = „aufleiten" = Ableitung umkehren = Bestandsfunktion aus Änderungsrate rekonstruieren = Stammfunktion bilden

Regeln beim Integrieren

	$f(x)$	$F(x)$
Potenzregel	$ax^{\boxed{n}}$ $(n \neq -1)$	$\frac{a}{\boxed{n+1}} \cdot x^{\boxed{n+1}}$
const.-Faktor	$\underline{a} \cdot g(x)$	$\underline{a} \cdot G(x)$
Summenregel	$g(x) + h(x)$	$G(x) + H(x)$

Unbestimmtes Integral: Menge aller Funktionen, die beim Ableiten $f(x)$ ergeben

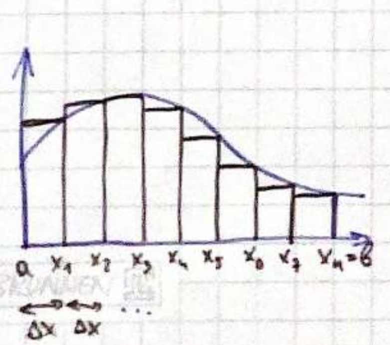
Bestimmtes Integral: orientierter Flächeninhalt unter einer Funktion im Interval $[a;b]$ $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$

Integralfunktion: $\boxed{I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$ → Funktion für Fläche unter $f(t)$ zwischen a u. x

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$\boxed{I'_a(x) = f(x)}$ (die Integralfunktion ist die Stammfunktion)

$\boxed{I_a(b) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$ (Fläche zw. a u. b ist Differenz der Stammfunktionswerte bei a u. b)

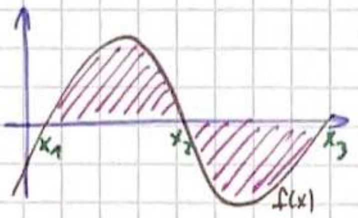


$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$ → Annäherung

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \cdot \Delta x$$ → genau, unendlich schmale Streifen

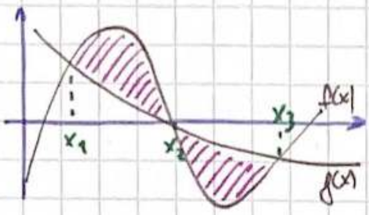
Flächeninhalte mit Integralen

Integrale einzelner Teile aufaddieren



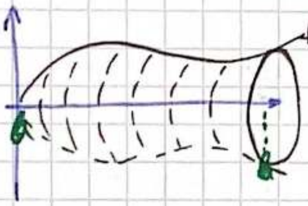
1) Nullstellen bestimmen
2) Jeden Abschnitt einzeln integrieren
3) Beträge aufaddieren

Integral der Differenz berechnen, einzeln, dann aufaddieren



1) Schnittstellen bestimmen
2) Jeden Abschnitt Integrale der Differenz von f(x) u. g(x) berechnen
3) Beträge aufaddieren

Volumen von Rotationskörpern



$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

→ quadrieren
→ integrieren
→ mal π

$\hat{=} \quad \pi \quad \cdot \quad r^2$ „Integral ist Limes-Summe der Balken"

Analysis – Tangentengleichung (u. Normalengleichung)

$f(x) = x^2 - 5x + 3$ Tangente bei $x = 1$

1) Berührungspunkt bestimmen

$f(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 3 = -1 \implies P(1 \mid -1)$

2) Steigung bestimmen

$f'(x) = 2x - 5 \quad \rightarrow \quad f'(1) = -3 \implies m = -3$

3) einsetzen

$y = mx + b \quad \rightarrow \quad -1 = -3 \cdot 1 + b \implies b = 2$

4) Aufstellen

$y = -3x + 2$

Normale genauso, nur:
Steigung Tangente $= \boxed{f'(x)}$
Steigung Normale $= \boxed{\frac{-1}{f'(x)}}$