

Normen

Vektor

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_i x_i^2}$$

Matrix

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

(Zeilen)

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

(Spalten)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

Funktion

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f|$$

$$\|f\|_\infty = \sqrt{a} \int_a^b f^2$$

$$\|f\|_2 = \sup_{a,b} f$$

Taylor

$$f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x}-x) + f''(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot (\tilde{x}-x)^2 + \dots + f^{(k)}(\xi) \frac{1}{k!} (\tilde{x}-x)^k$$

Kondition

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \cdot \frac{x}{f(x)} \right|$$

$$\kappa_{\text{rel}}(x,y) = \max \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{x}{f(x,y)} \right|, \left| \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{y}{f(x,y)} \right|$$

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

$$\kappa_2(A) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}$$

$$\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)}{f(x, y)} \leq \kappa_{\text{rel}}(x, y) \cdot \left(\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} + \frac{\|\tilde{y} - y\|}{\|y\|} \right)$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}} \cdot \left(\frac{\|\tilde{b} - b\|}{\|b\|} + \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} \right), \quad \kappa(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|} < 1$$

Gleitkommazahlen

$$M(b, m, r, R)$$

$$\text{eps} := \frac{b^{1-m}}{2}$$

Matritzen

regulär/nichtsingular $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

- Zeilenskalierung: Kondition \uparrow

$$D_z \text{ mit } d_i = \left(\sum_j |a_{ij}| \right)^{-1}$$

- Pivotisierung: Stabilität \uparrow

▷ LR-Zerlegung

$$(P(D))A = LR$$

(Gauß)

▷ Cholesky-Zerlegung (für spol)

$$A = LDL^T$$

$$\begin{cases} \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \\ \det > 0 \\ A_{ii} \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

▷ QR-Zerlegung

$$A = QR,$$

Q orthogonal

$$\begin{cases} Q^{-1} = Q^T \\ n \times n_2 = n \times n_2 \\ \det = 1 \\ n \times n_2 = n \times n_2 = n \times n_2 \end{cases}$$

Householder

$$v = a_1 + \|a_1\|_2 \cdot e_1$$

$$a_{n,T} = a_n - \frac{2}{\underbrace{v^T \cdot v}} \cdot v \cdot \underbrace{v^T \cdot a_n}$$

$$Ax = b \Rightarrow \bar{R}x = b_1, \quad \|r\|_2 = \|b\|_2$$

Singularwertzerlegung (SVD)

$$A = U \cdot \Sigma \cdot V^T$$

$$\Sigma^+ = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1 & & \\ & \dots & \\ & & 1/\sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

LAP

$$x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

$$Ax^* - b \perp \text{im}(A)$$

$$\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\vartheta)} \cdot \frac{\|b - b_0\|_2}{\|b\|_2}$$

► Normalengleichungen

$$A^T A x = A^T b$$

$$\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$$

► QR-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Fixpunktiteration

$$x^* = \Phi(x^*)$$

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$$

$$S = L^2$$

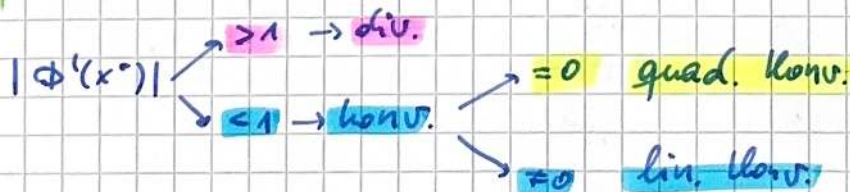
$$L = \max |f'(x)|$$

Banach: $\left. \begin{array}{l} \text{► Selbstabb.} \\ \text{► Kontraktion} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{genau ein FP, konv. f\u00fcr bel. } x_0$

a-priori: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|$

a-posteriori: $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|$

$$k \geq \log\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right) / \log(L)$$



Newton-Verfahren

System

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$F'(x^k) \cdot s^k = -F(x^k)$$

$$x^{k+1} = x^k + s^k$$

Sekantenverfahren

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Interpolation

$$P = \sum_j f(x_j) \cdot l_j(x)$$

$$l_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} = \delta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{pmatrix} \vec{a} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ f(x_2) \end{pmatrix}$$

$$\omega = (x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

Numerische Integration

Mittelpunktsregel

$$(b-a) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Trapezregel

$$h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(\dots) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

$$E \approx \frac{h^2}{12} [f'(b) - f'(a)]$$

Rechenaufwände

Cholesky	$\frac{1}{6} n^3$
Gauß mit Pivot	$\frac{1}{3} n^3$
Zeilenstufenform	n^2
Inverse	$\frac{4}{3} n^3$
Vorwärts/Rückwärtslös.	$\frac{1}{2} n^2$
Householder	$\frac{2}{3} n^3$
Normalengleichungen	$\frac{1}{2} m \cdot n^2$