NuMa 2/1

- **Kondition**: Empfindlichkeit für Störungen des Problems
- **Stabilität**: Empfindlichkeit für Störungen des Lösungsverfahrens
- **Effizienz**: numerischer Aufwand, um gewünschte Genauigkeit zu erzielen

Norm:

- Positivität $\boxed{\|v\| \geq 0; \ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0}$
- Homogenität $\boxed{\|\alpha v\| = |\alpha| \cdot \|v\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$
- Dreiecksungleichung: $\boxed{\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|}$

Vektornormen

- 1-Norm: $\boxed{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|}$
- ∞-Norm: $\boxed{\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|}$
- 2-Norm: $\boxed{\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}$ (Euklidische Norm)

Matrixnormen

- 1-Norm: $\boxed{\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}$ (Spalten)
- ∞-Norm: $\boxed{\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}$ (Zeilen)
- 2-Norm: $\boxed{\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T \cdot A)}}$ (Eigenwerte)

Taylor-Entwicklung (um x!)

$$\boxed{f(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)(\tilde{x} - x) + \frac{f''(x)}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \dots + \underbrace{\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(\tilde{x} - x)^k}_{\text{Restterm!}}}$$

allg.

? $\boxed{\varkappa_2(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}$, mit $\boxed{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}}$?

sym.

$\boxed{\varkappa_2(A) = \frac{|\lambda_{max}|}{|\lambda_{min}|}}$

Taylor-Entwicklung für vektorwertige Fkts

$$\boxed{f(\tilde{x}) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}(\tilde{x}_j - x_j) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}(\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3)}$$

mit $\boxed{\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^T \quad f''(x) := \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i x_j}\right)_{i,j=1}^{n}}$

$$\boxed{f(\tilde{x}) = f(x) + (\nabla f(x))^T(\tilde{x} - x) + \frac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3)}$$

- relative Kondition:

$$\boxed{\frac{\delta_y}{\delta_x} = \frac{\text{Ausgabefehler rel.}}{\text{Eingabefehler rel.}}}$$

- absolute Kondition

$$\boxed{\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X} = \frac{\|\text{Ausgabefehler abs.}\|_Y}{\|\text{Eingabefehler abs.}\|_X}}$$

{ Normen im jeweiligen Raum

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\boxed{\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{rel}(x) \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|}$ mit $\boxed{\kappa_{rel}(x) = \left|f'(x) \frac{x}{f(x)}\right|}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\boxed{\frac{f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x,y)}{f(x,y)} \dot{\leq} \kappa_{rel}(x,y) \cdot \left(\left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right| + \left|\frac{\tilde{y} - y}{y}\right|\right)}$ entsprechend für höhere Dimensionen

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\boxed{\frac{\|f(\underline{\tilde{x}}) - f(\underline{x})\|}{\|f(\underline{x})\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\underline{\tilde{x}} - \underline{x}\|}{\|\underline{x}\|}}$

mit $\boxed{\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$

Multiplikation/Division: gut konditioniert, $\kappa_{rel} \leq 1$

Addition: { gut konditioniert, wenn $\boxed{\text{gleiches VZ}}$; sehr schlecht konditioniert, wenn $\boxed{x_1 \approx -x_2}$

$\kappa_{rel} \gg 1$, wenn $|x+y| \ll \max\{|x|, |y|\}$

NuMa 2/2

Floats: $x = \pm\, 0{,}d_1 d_2 \dots d_m \cdot B^e$

$x = \pm \left(\sum_{j=1}^{m} B^{-j} \cdot d_j\right) \cdot B^e$ — Exponent $e \in [r, R]$

m-Länge, Mantisse f, Basis

$\Rightarrow$ Maschinenzahlen $\boxed{\mathbb{M}(B, m, r, R)}$

- e beschränkt Bildbereich
- f beschränkt Genauigkeit

Maschinengenauigkeit $\boxed{eps := \frac{B^{1-m}}{2}}$

Rundungsfehler $\boxed{\varepsilon : |\varepsilon| \le eps,}$ $\boxed{fl(x) = x(1+\varepsilon)}$

Pseudoarithmetik → Reihenfolge wichtig!

$$\boxed{\begin{aligned} x \circledast y &= fl(x \ast y) \\ &= (x \ast y)(1+\varepsilon) \end{aligned}}$$

$\ast \in \{+, -, \cdot, :\}$

$x, y \in \mathbb{M}$

+ −

Auslöschung

Stabilität:

Algorithmus stabil/gutartig, wenn „dessen Fehler in Größenordnung des Fehlers durch Kondition"

rückwärts stabil: exakte Lsg eines nahezu richtigen Problems

$$\boxed{\frac{\|\tilde{f}(x) - f(x)\|}{\|f(x)\|} = \mathcal{O}(\varkappa(x)\, eps)}$$

$$\boxed{\varkappa_{rel} = \max\left\{ \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \cdot \frac{x}{f(x,y)}\right|, \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \cdot \frac{y}{f(x,y)}\right| \right\}}$$

$\boxed{\|Ay\| \le \|A\|\,\|y\|}$

$\boxed{\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx}$

$\boxed{\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2}}$

$\boxed{\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|}$

Störungssatz (in ∞-Norm)

$$\boxed{\delta_x \le \frac{\varkappa(A)}{1 - \varkappa(A) \cdot \delta_A} (\delta_b + \delta_A)}$$

für $\boxed{\varkappa(A) \cdot \delta_A < 1}$

$\delta_A = \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$

NuMa 3/1

A **regulär / nichtsingulär** $\Leftrightarrow$ $\boxed{\det A \neq 0}$

- $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \varkappa(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}}$$

- $(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$ u. $\varkappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\varkappa(A)}{1-\varkappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)}$$

Residuum $\boxed{\tilde{r} := b - A\tilde{x}}$ wo $\tilde{x}$ Näherungslsg

$\varkappa(A)$ groß $\rightarrow$ Residuum schlechtes Maß für Fehler

Zeilenskalierung $\rightarrow$ minimales $\varkappa_\infty(D_z A)$ $\quad \|D_z A\|_\infty = 1$

$$\boxed{Ax = b \quad \Rightarrow \quad \underbrace{D_z A}_{A_{neu}} x = \underbrace{D_z b}_{b_{neu}}}$$

Wähle Diagonalmatrix D_z so, dass $\varkappa(A_{neu})$ gut

$$\boxed{d_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\right)^{-1}}$$

$D_z A$ zeilenweise äquilibriert $\rightarrow$ Alle Betragssummen gleich 1

Berechnung	Aufwand
▷ Skalarprodukt $x^T y$	$2n$
▷ Cholesky-Zerlegung	$1/3\, n^3$
▷ Dyadisches Produkt xy^T	n^2
▷ M-V-Produkt Ax	$2n^2$
▷ Householder-Trafo	$4/3\, n^3$ / $2mn^2$
▷ M-M-Produkt AB	$2n^3$
▷ Gauß mit Pivotisierung	$2/3\, n^3$
▷ Rückwärtseinsetzen	n^2

145

$\blacktriangledown \cdot \blacktriangledown = \blacktriangledown$	$\det(\blacktriangledown) = \prod a_{ii}$
$(\blacktriangledown)^{-1} = \blacktriangledown$	$\lambda(\blacktriangledown) = a_{ii}$

Matrix-Zerlegungen

- LR: $\boxed{A = RL}$ $A = ◣ \cdot ◥$
- Cholesky: $\boxed{A = LDL^T}$ $D = (\ddots)$
- QR: $\boxed{A = QR}$ Q orthogonal

Gauß ohne Pivotisierung $(A|b) \to (R|c)$ → nicht stabil
→ LR-Zerlegung als Nebenprodukt
! wenn Pivotelemente ungleich Null

Gauß mit Pivotisierung → stabil
→ Zeilen vertauschen (Multiplikation mit P), damit das Betragsmäßig größte Element Pivot ist → $LR = PDA$ (vorher Skalieren)
$\boxed{LR = PA}$

Zeilenskalierung / -äquilibrierung → Kondition ↑
Pivotisierung → Stabilität ↑

$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow \boxed{L\underbrace{Rx}_{y} = Pb}$ 1. LGS

$\Rightarrow PA = LR$ $\boxed{\begin{array}{l} Ly^k = Pb^k \\ Rx^k = y^k \end{array}}$ 2. viele LGS (y^k, b^k)

$\Rightarrow \boxed{LR\underbrace{x^i}_{\text{ite Spalte von } A^{-1}} = P\underbrace{e^i}_{\text{Einheitsvektor}}}$ 3. Inverse

$\Rightarrow \boxed{\det A = (-1)^{\#\text{Zeilenswaps}} \prod_{j=1}^{n} r_{jj}}$ 4. Determinante

NuMa 3/2

symmetrisch positiv definite (s.p.d.) Matrix:

$\boxed{A^T = A}$ $\wedge$ $\boxed{x^T A x > 0}$

A s.p.d.

$\Rightarrow$ A invertierbar, $\boxed{A^{-1} \text{ s.p.d.}}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_i(A) \in \mathbb{R}^+}$

$\Rightarrow \boxed{A_{ii} \in \mathbb{R}^+}$, größter Eintrag liegt auf Diagonale

$\Rightarrow$ Gauß ohne Pivot: $\boxed{\text{alle Pivot} \in \mathbb{R}^+}$

Cholesky-Zerlegung

A s.p.d. $\Rightarrow$ stabil

$\boxed{A = LDL^T}$ $\boxed{A = (\text{◣}) \cdot (\ddots) \cdot (\text{◥})}$ $d_{ii} > 0$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d_{kk} = a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2 \cdot d_{jj} \\ l_{ik} = \left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} \cdot d_{jj} \cdot l_{kj}\right) \cdot \frac{1}{d_{kk}} \end{cases}$$

- $\underbrace{LD}L^T = LR$
- $\boxed{Ax = b} \Rightarrow \boxed{LD\underbrace{L^T x}_{y} = b}$ $\boxed{Ly = b, \; L^T x = D^{-1} y}$

orthogonale Matrix:

$\boxed{Q^T \cdot Q = \mathbb{1}}$

$\Rightarrow$ Spalten sind Orthonormalbasis

$\Rightarrow \boxed{Q^{-1} = Q^T}$

$\Rightarrow Q^T$ orthogonal

$\Rightarrow \boxed{\|Q \cdot x\|_2 = \|x\|_2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \boxed{\kappa_2(Q) = 1}$

$\Rightarrow \boxed{\|A\|_2 = \|QA\|_2 = \|AQ\|_2}$ $\forall A$

$\Rightarrow Q \cdot \tilde{Q}$ orthogonal für $\tilde{Q}$ orthog.

QR-Zerlegung

$\boxed{A = QR}$ $\boxed{A = (\text{orth}) \cdot (\text{◥})}$

bzw. $\boxed{\tilde{Q}A = \tilde{R}}$

Householder-Transformation $\Rightarrow$ sehr stabil

$$\boxed{A = QR = H_1 H_2 H_3 \dots R}$$

$$\boxed{\dots H_3 H_2 H_1 A = R}$$

$$A = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \quad \dots \quad H_1 A = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{pmatrix} \quad \dots \quad H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

H_i: i-te Householder-Matrix, löscht Einträge in nem Vektor ab i-tem Eintrag

$$H = \mathbb{1} - \underbrace{\frac{2}{v^T v}}_{\text{Skalar}} \underbrace{v v^T}_{\text{Matrix}}$$

VZ von a_1

$$v = a \pm \|a\|_2 \cdot e_1 \quad \text{für } i = 1$$

$$v = \tilde{a} - \|\tilde{a}\|_2 \cdot e_i \quad \text{für } i \neq 1$$

$$\tilde{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \quad \text{(Einträge bis } i \text{ gelöscht)}$$

LGS
- s.p.d. $\rightarrow$ Cholesky
- überbestimmt, schlechte Kondition, hohe Genauigkeit $\rightarrow$ QR
- sonst $\rightarrow$ Gauß

$$A_1 := A - \frac{2}{v^T v} \cdot v \cdot v^T \cdot A$$

$$b_1 := b - \frac{2}{v^T v} \cdot v \cdot v^T \cdot b$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Ax - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|A_1 x - b_1\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^2} \|Rx - \hat{b}\|_2$$

mit $R = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}$

NuMa 4

Lineare Ausgleichsrechnung

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$
- bestimme bestmöglichstes $x \in \mathbb{R}^n$
- $\boxed{x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2}$

Spalten von A orthogonal <=> κ gut

Spalten von A l.a. <=> κ schlecht

Modell: $y(t; x_1, x_2, \dots x_n)$ x_i: Parameter → linear in Parametern

Daten: $b_i \approx y(t_i; x_1, x_2, \dots, x_n)$ b_i: Messwerte

Gauß-Fehlerquadratkriterium:

bestimme x_i, sodass minimiert

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} [y(t_i; x_1, x_2, \dots x_n) - b_i]^2}$$ → ein Maß für Fehler

$$\Rightarrow \min_x \sum_{i=1}^{m} (a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \dots + a_{in} x_n - b_i)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2}$$

(voller Spaltenrang)

↗ gewöhnliches LAP → $\boxed{\mathrm{Rang}(A) = n}$ → eindeutige Lsg

↘ allgemeines LAP → $\boxed{\mathrm{Rang}(A) \neq n}$ → Lsg mit minimaler Euklidischer Norm

- **Normalengleichungen**

$\boxed{A^T A x = A^T b}$ Systemmatrix $A^T A$ s.p.d.

$\Rightarrow x^*$ = Lsg davon = Lsg des LAP

$$\boxed{\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\vartheta)} \frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}}$$ κ bzgl. $\tilde{b}$

$$\boxed{\frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \left(\kappa_2(A) + \kappa_2(A)^2 \tan(\vartheta)\right) \frac{\|\tilde{A} - A\|_2}{\|A\|_2}}$$ κ bzgl. $\tilde{A}$

LAP lösen mit Normalengleichungen

- Berechne A^TA, A^Tb
- Berechne Cholesky von $\boxed{A^TA = LDL^T}$
- Löse $\boxed{Ly = A^Tb}$, $\boxed{L^Tx = D^{-1}y}$

$\boxed{A^TAx = A^Tb}$

$\boxed{L\underbrace{DL^Tx}_{y} = A^Tb}$

$\boxed{L^Tx = D^{-1}y}$

⚠ → A^TA aufwendig, Gefahr der Auslöschung

→ Rundungsfehler bei Cholesky verstärkt

$\varkappa_2(A^TA) = \boxed{\varkappa_2(A)^2}$ Fehlerverstärkung

LAP lösen mit QR-Zerlegung

$\|Ax - b\|_2$

$\|Q^TAx - Q^Tb\|_2$

$\|Rx - Q^Tb\|_2^2$

- Berechne QR: $\boxed{QA = \begin{pmatrix}\tilde R \\ 0\end{pmatrix}}$, $\tilde R$ quadratisch $\tilde R \in \mathbb{R}^{n \times n}$

  $\boxed{Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$ } n Einträge, } restliche Einträge
- Löse $\boxed{\tilde R x = b_1}$
- Norm des Residuums: $\|b_2\|_2$

$Ax = b$

$QAx = Qb$

$\tilde R x = b_1$

⚠ → sehr stabil

$\boxed{\varkappa_2(A)}$ Fehlerverstärkung

Singulärwertzerlegung (SVD)

$A = U\Sigma V^T$

$A = U\tilde Q \tilde R$

$A = Q \ R$

$$\boxed{A} = \boxed{U} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \cdot \boxed{V^T}$$

EVs von AA^T

Nullen je nach Format

EVs von A^TA

U, V orthogonal

$\boxed{\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^TA)}}$ (von groß nach klein sortiert)

Singulärwerte

- rang(A) = n: $\boxed{y = \Sigma^{-1}(U^Tb)}$, $\boxed{x^* = Vy}$
- rang(A) < n: $\boxed{x^* = A^+b}$ mit $\boxed{A^+ = V\Sigma^+U^T}$ mit $\boxed{\Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots \ \sigma_r^{-1} & \\ 0 & & \end{pmatrix}}$

⚠ hoher Rechenaufwand $\boxed{\varkappa_2(A) = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}}$

NuMa 5

Nichtlineare GS

geg.: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, sodass $f(x^*) = 0$
(mehr Gleichungen als Unbekannte → nichtlineares Ausgleichsproblem)
→ iterative Lsgsverfahren

Störung: $\boxed{|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \varepsilon^{1/m} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{1/m}}$

→ Probleme mit mehrfachen Nullstellen sehr schlecht konditioniert

Fixpunktiteration

- $\boxed{M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}}$, invertierbar in Umgebung von x^*. dann
  $\boxed{f(x^*) = 0 \iff M_{x^*} f(x^*) = 0}$
- $\boxed{M_{x^*} f(x^*) = 0 \iff x^* = x^* - M_{x^*} \cdot f(x^*)}$
- Nstproblem äquivalent zum Fixpunktproblem
  $\boxed{x^* = \Phi(x^*), \quad \text{mit } \Phi(x) := x - M_x \cdot f(x)}$
- wähle x_0 in Umgebung von x^*
- $\boxed{x_{k+1} = \Phi(x_k)}$

! $|\Phi'(x^*)| < 1$: konvergiert
$|\Phi'(x^*)| > 1$: divergiert

} → wähle M_x bzw. Φ geeignet

Lipschitz-stetig:

$\boxed{\exists L: \|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|}$

Selbstabb.:

$\boxed{\Phi: E \to E, \quad E \subset \mathbb{R}^n}$

Kontraktion:

$\boxed{\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \|x - y\|, \quad L < 1}$

Banachscher Fixpunktsatz

$E = [a, b]$

$$\boxed{1 > L := \max_{x \in [a,b]} |\Phi'(x)|}$$

J-Matrix für $E \subset \mathbb{R}^n$

Φ Selbstabb. und Kontraktion

$\Rightarrow$
- genau ein Fixpunkt x^*
- Fixpunktiteration konvergiert für bel. x_0
- a-priori Abschätzung $\boxed{\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x_1 - x_0\|}$
- a-posteriori Abschätzung $\boxed{\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L} \|x_k - x_{k-1}\|}$

max # Iterationen:

$$\boxed{k \geq \log\left(\frac{\varepsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right) / \log(L)}$$

Konvergenzordnung einer Folge (p)

$\boxed{\|x_{k+1} - x^*\| \leq C \cdot \|x_k - x^*\|^p}$ $\forall k \geq k_0$, $0 < C < 1$ für $p = 1$

Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens
es gibt Umgebung U um x^*, sodass für alle x_0 die erzeugte Folge Konv.-ordnung p hat

$\boxed{\Phi'(x^*) = 0}$ quadratische Konv.

$\boxed{0 \neq \|\Phi'(x^*)\| < 1}$ lineare Konv.

skalare Folgen mit L5.17: a-posteriori Absch., große k

$p = 1$: $\boxed{x^* - x_k \approx \frac{A_k}{1 - A_k} \cdot (x_k - x_{k-1})}$, $\boxed{A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}} \approx \text{const}}$

$p > 1$: $\boxed{x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k}$

Vektorfolgen:

$p > 1$: $\boxed{\|x_k - x^*\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|}$, große k

Newton-Verfahren (skalare Gl.)

- Φ wählen, sodass möglichst schnell konv.
- $\Phi(x) = x - M_x f(x)$ (hier $M_x = g(x)$)
- wähle $g(x)$ so, dass $\Phi'(x^*) = 0$
- $\Phi'(x^*) = 0 \iff g(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}$
- $\boxed{\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}}$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

- lokal quadratisch konvergent → braucht guten Startwert

Sekantenverfahren

$$\boxed{x_{k+1} = \frac{x_{k-1} \cdot f(x_k) - x_k \cdot f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

⊕ keine $f'(x)$, Effizienter

⊖ $p \approx 1{,}6$ lokal, zwei Startwerte

Newton-Iteration (für Systeme)

- $f = (f_1, \dots f_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, suche $x^* = (x_1^*, \dots x_n^*)^T$ sodass $f(x^*) = 0$

  $x^k := (x_1^k, \dots x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n$
- geg.: x^0
  - berechne $\boxed{f(x^k)}$ u. $\boxed{f'(x^k)}$
  - löse LGS $\boxed{f'(x^k) \cdot s^k = -f(x^k)}$ } LR-Zerlegung
  - setze $\boxed{x^{k+1} = x^k + s^k}$

- Vereinfachtes Newton-Verfahren: $\boxed{f'(x^0) \cdot s^k = -f(x^k)}$

  ⊖ keine quadratische Konv., evtl. $f'(x)$ neu berechnen nach 3-5 Schr.
- Annäherung der Jacobi-Matrix

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \frac{f_i(x + h \cdot e^j) - f_i(x)}{h}$$

e^j = j-ter Einheitsvektor

? h passend wählen

- Homotopieverfahren
- gedämpftes Newton-Verfahren
- Wahl von x_0 aus Hintergrundinfos

NuMa 6

Nichtlineares AP

Messungen $b_1, b_2, \dots, b_m$ an Zeitpunkten $t_1, t_2, \dots t_m$

Parameter $x_1, x_2, \dots x_n$

$\boxed{F_i(x) := y(t_i; x) - b_i}$ $\quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

→ Bestimme x^*, sodass $\boxed{\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|}$

bzw. $\boxed{\varphi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x)}$

mit $\boxed{\varphi(x) := \frac{1}{2}\|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)}$

↳ lokales Min, wenn

- $\boxed{\nabla\varphi(x^*) = 0}$ $\qquad \nabla\varphi(x) = F'(x)^T F(x)$ ← Jacobi-Matrix
- $\boxed{\varphi''(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ ist spd}}$

Gauß-Newton-Verfahren

- lineare Approx. mit Taylor
- schrittweise Annäherung
- Berechne $\boxed{F(x^k)}$, $\boxed{F'(x^k)}$
- finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ sodass

$$\boxed{\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)s + F(x^k)\|_2} \Big\} \text{ LAP}$$

- setze $\boxed{x^{k+1} = x^k + s^k}$
- Abbruch bei $\|F'(x^k)^T F(x^k)\|_2 \leq \varepsilon$

→ Fixpunktiteration, konv. nicht schneller als linear
→ Sattelp./Max. abstoßend
→ lok. Min. kann abstoßen
→ Konv. nicht garantiert

NUMA 8

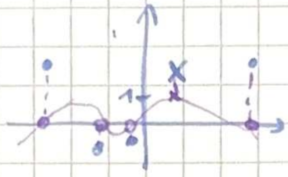
Lagrange Interpolation

- über Stützstellen $(x_0; f(x_0)), \dots$
- stets eindeutig lösbar

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot l_{jn}(x)}, \quad \boxed{l_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome

für jeden Punkt konstruieren wir ein $l_j(x)$



punktweise Auswertung mit Aitken:

→ festes x

→ Reduktion des Grades

$$\boxed{\begin{aligned} P(f|x_0, x_1, \dots x_n)(x) = {} & \frac{x - x_0}{x_n - x_0} \cdot P(f|x_1, \dots x_n)(x) \\ & + \frac{x_n - x}{x_n - x_0} \cdot P(f|x_0, \dots x_{n-1})(x) \end{aligned}}$$

rekursiv:

$$\boxed{P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}} \left(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}\right)}$$

Neville-Aitken:

→ keine explizite Darstellung von P

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & \\
x_0 & f(x_0) & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & P_{n,n}
\end{array}$$

$P(x) = a_0 \cdot x^0 + a_1 \cdot x^1 + \dots a_n \cdot x^n$

$$\rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix}}_{\text{Vandermonde Matrix } V_n} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \dots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \iff V_n^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Kondition $\boxed{\kappa(V_n) = \|V_n\| \, \|V_n^{-1}\|}$

→ meist sehr schlecht

Newtonsche Interpolationsformel

$P_{n-1} \to P_n$ (einen Wert miteinbeziehen)

$$\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n \cdot (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})}$$

mit

$$\boxed{\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}}$$

Newtonsche Basis: Knotenpolynome

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_1 = (x-x_0), \quad \dots \quad \omega_n = (x-x_0) \dots (x-x_{n-1})$$

- **Lagrange-Basis**

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot l_{jn}(x), \qquad l_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}}$$

- **monomiale Basis**

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \qquad V_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \dots \\ f(x_n) \end{pmatrix}}$$

- **Newtonsche Basis**

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \dots x_j] f \cdot \omega_j(x), \qquad [x_0 \dots x_j] f = \frac{[x_1 \dots x_n] f - [x_0 \dots x_{n-1}] f}{x_n - x_0}}$$

Fehleranalyse – Restglieddarstellung

$$\boxed{f(x) - P(f \mid x_0, \dots x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

NuMa 10

Trapezregel:

$$\boxed{\int_a^b f = \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right]}$$

Summierte Trapezregel:

$$\boxed{\int_a^b f = h\left[\tfrac{1}{2} f(a) + f(t_1) + \ldots + f(t_{n-1}) + \tfrac{1}{2} f(b)\right]}$$

Fehler:

$$\frac{|f''(\xi)|}{12} \cdot h^3 \cdot n = \frac{h^2}{12}(b-a)|f''(\xi)| \qquad |f''(\xi)| = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

$$\approx \frac{h^2}{12}\left(f'(b) - f'(a)\right)$$

Newton-Cotes-Formeln:

$$\boxed{\int = h \cdot \sum_{j=0}^{m} \underbrace{c_j}_{\underbrace{\frac{1}{h}\int_c^d \ell_{jn}(x)\,dx}_{\text{integriere Lagrange-Polynom}}} \cdot f(x_j)}$$

Fehler: $\boxed{\dfrac{h^{m+2}}{(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_\infty}$