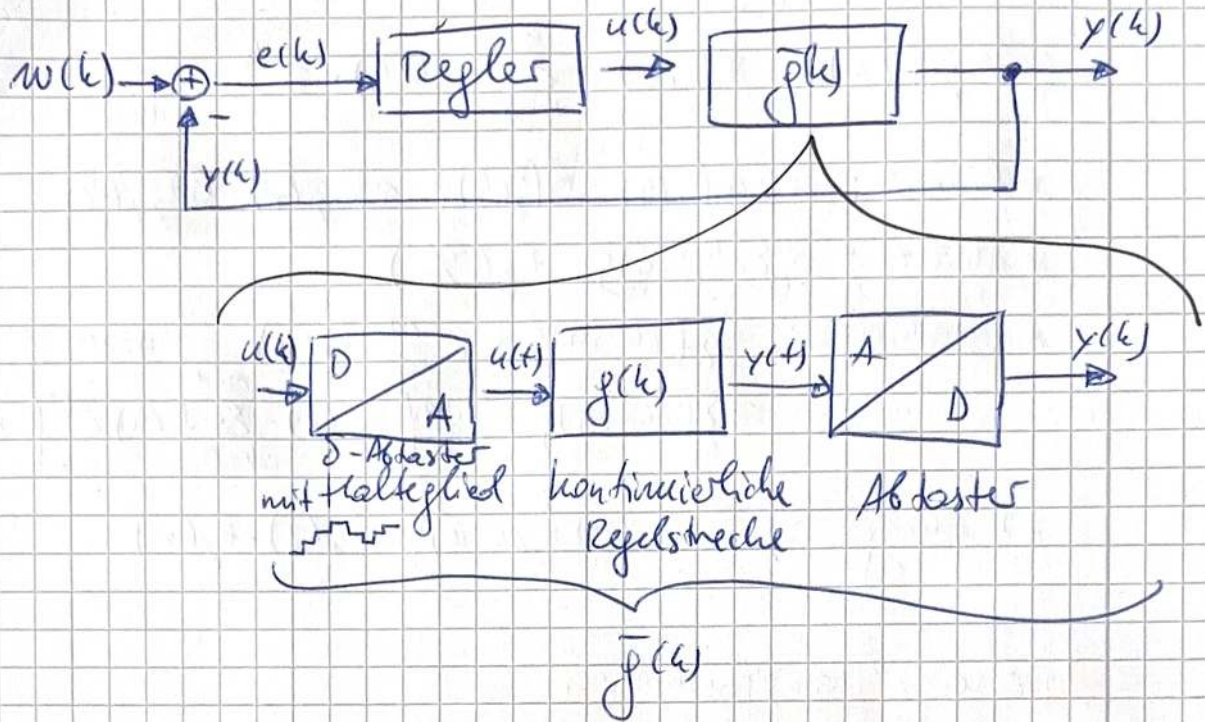




► Quantisierung vernachlässigbar $t = k \cdot T_s$

► $\bar{G}(s) = H(s) \cdot G(s) = \bar{H}G(s)$

$\bar{g}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\bar{G}(s)\} \Rightarrow \bar{g}(k) = \bar{g}(t)|_{t=kT_s}$

► Halteglied 0. Ordnung (ZOH)

→ hält den abgetasteten Wert über eine Zeitperiode einfach nur fest

→ $g_H(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T_s)$



→ $H_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-sT_s} = \frac{1 - e^{-sT_s}}{s}$

Zeitkontinuierlich

Zeitdiskret

DGL

Differenzengl: $y(k) = \sum_{\sigma=0}^n \beta_{\sigma} \cdot u(k-\sigma) - \sum_{\nu=1}^n \alpha_{\nu} \cdot y(k-\nu)$

Euler

2 ↗

ℒ-Transformierte

z-Transformierte

BRUNNEN

Gewichtsfunktion $g(t)$

Gewichtsfolge $g(k)$

↗ z ↘

2.2

z-Transformation: „zeitdiskreter Laplace“

$$\mathcal{Z}\{f(k)\} = F_z(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT_s) \cdot z^{-k}$$

• linear: $\mathcal{Z}\{af_1(k) + bf_2(k)\} = aF_{1z}(z) + bF_{2z}(z)$

• ähnlich: $\mathcal{Z}\{a^k f(k)\} = F_z(z/a)$

• verschieben: $\mathcal{Z}\{f(k-m)\} = z^{-m} \cdot F_z(z) \quad m \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{f(k+m)\} = z^m \left[F_z(z) - \sum_{k=0}^{m-1} f(k) z^{-k} \right] \quad m > 0$$

• Faltung: $\mathcal{Z}\left\{ \sum_{v=0}^k f_1(v) f_2(k-v) \right\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$

Inverse z-Transformation

$$\mathcal{Z}^{-1}\{F_z(z)\} = f(k)$$

• Potenzreihenentwicklung $F_z(z) = \frac{Z_z(z)}{N_z(z)}$

$$Z_z(z) : N_z(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + \dots$$

→ Folgewerte, aber keine allgemeine Formel

• sonst Anwenden der Sätze (linear etc)

• PBZ + Korrespondenztafel

• $H_0 G(z) = \mathcal{Z}\{H_0 G(s)\} = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{ \frac{G(s)}{s} \right\}$

→ mit Tabelle evaluiert

→ nur falls Eingang Treppenförmig

• Approximationen

- Euler rückwärts

$$s \approx \frac{z-1}{T_s z}$$

- Euler vorwärts

$$s \approx \frac{z-1}{T_s}$$

- trapez

$$s \approx \frac{z}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$$

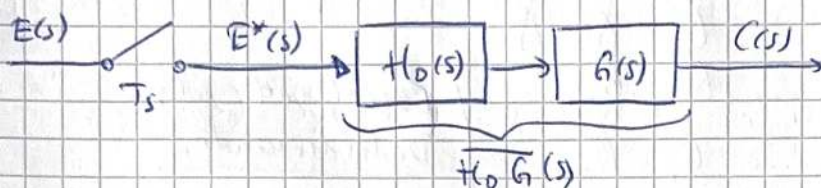
Sys2 Ü3

$$f(t) \xrightarrow{T_s} f^*(t) / f(kT_s)$$

$$F^*(s) \stackrel{!}{=} F(z)$$

$$\Rightarrow z = e^{sT_s}$$

$$\Rightarrow F(z) = F^*(s) \Big|_{e^{sT_s} = z}$$



$$C(s) = E^*(s) \cdot \overline{H_0 G(s)}$$

$$\stackrel{*}{\Rightarrow} C^*(s) = [E^*(s) \cdot \overline{H_0 G(s)}]^* = E^*(s) \cdot \overline{H_0 G^*(s)}$$

$$\stackrel{z}{\Rightarrow} C(z) = E(z) \cdot \overline{H_0 G(z)}$$

Stabilität

▷ BIBO (im Zeitbereich)

$$|u(k)| < \infty \Rightarrow |y(k)| < \infty, \text{ wenn}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |g(k)| < \infty$$

▷ im Bildbereich

- stabil wenn alle Polstellen im Einheitskreis

- stabil $\rightarrow g(k) \rightarrow 0$

- grenzstabil, wenn komplex konj. PS auf dem Einheitskreis

$\rightarrow$ System schwingt

- grenzstabil, wenn eine PS auf dem Einheitskreis

$\rightarrow$ $g(k) \rightarrow C$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Jury-Kriterium (Kürzweg für zeitdiskrete)

1) C.P.: $P(z) = x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n = 0$ ← wähle positiv

2) notwendig: $P(z=1) > 0 \wedge (-1)^n P(z=-1) > 0$

3) hinreichend:

$$|x_0| < x_n, x_n > 0, |b_0| > |b_{n-1}|, |c_0| > |c_{n-2}|, |d_0| > |d_{n-3}|, |s_0| > |s_2|$$

$$x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n-2} \ x_{n-1} \ x_n$$

$$x_n \ x_{n-1} \ x_{n-2} \ \dots \ x_2 \ x_1 \ x_0$$

$$b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-2} \ b_{n-1}$$

$$b_{n-1} \ b_{n-2} \ b_{n-3} \ \dots \ b_1 \ b_0$$

$$c_0 \ c_1 \ \dots$$

$$\dots$$

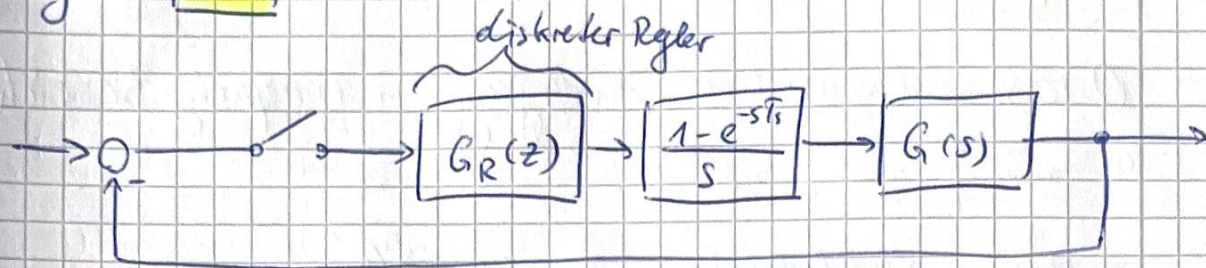
$$s_0 \ s_1 \ s_2$$

berechnet als
Determinanten

$$b_n = \begin{vmatrix} x_0 & x_{n-1} \\ x_n & x_n \end{vmatrix}$$

$$c_n = \begin{vmatrix} b_n & b_{n-1} \\ b_{n-1} & b_n \end{vmatrix}$$

Sys 2 Ü4



z.B. PI-Regler

$$G_R(s) = K_R \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \xrightarrow[\substack{\text{Euler n\u00e4h.} \\ s \approx \frac{z-1}{T_s z}}]{\text{Euler n\u00e4h.}} G_R(z) = K_R \left(1 + \frac{T_s z}{T_I (z+1)} \right)$$

$$\xrightarrow[\substack{\text{Tustin} \\ s \approx \frac{z}{T_s} \frac{z-1}{z+1}}]{\text{Tustin}} G_R(z) = K_R \left(1 + \frac{T_s (z+1)}{2 T_I (z-1)} \right)$$

Abh\u00e4ngig
von
Diskretisierungs-
verfahren

- ▷ Regler approximiert (vorgegebenes Verfahren)
- ▷ H_0 wird genau bestimmt

Quasi-kontinuierlich:

- ▷ Abtastzeit kleiner als $1/10$ der dominanten Zeitkonstante
- ▷ Abtaster u. Halteglied als Totzeit-Element dargestellt
mit $T_d = T_s/2$

Dead-Glied:

$$G_R = K \frac{1 + \tau_s}{1 + \alpha \tau_s} \quad \alpha < 1$$

$\alpha > 1$
Lag

$$|G_R(j\omega)| = K \frac{\sqrt{1 + \omega^2 \tau_s^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2 \tau_s^2}}$$

$$\varphi = \arctan(\omega \tau_s) - \arctan(\alpha \omega \tau_s)$$

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\tau_s \sqrt{\alpha}}$$

$$\varphi_{\max} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) - \arctan(\sqrt{\alpha})$$

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\varphi_{\max})}{1 + \sin(\varphi_{\max})}$$

Ü5

Quasi-kontinuierlich, Auslegung im Frequenz-Bereich

① $\rightarrow \frac{1-e^{-sT_s}}{s} \rightarrow e^{-sT_s/2}$

② Neue Regelstrecke $\tilde{G}_S = G_S \cdot e^{-sT_s/2}$

③ direkt vom s-Bereich in jw-Bereich

④ Anforderungen

$\rightarrow$ Phasenreserve, Bandbreite, stationärer Regelfehler, ...

$\rightarrow$ Regler auflegen

$\rightarrow$ im offenen Regelkreis $G_o(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot \tilde{G}_S(j\omega)$

$\rightarrow$ vereinfachtes Nyquist-Kriterium

Zeitdiskret, Auslegung im Frequenz-Bereich

① Regelstrecke diskretisieren

$\tilde{H}G(z) = \frac{z-1}{z} \cdot \mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}$

② w-Transformation

③ direkt vom w-Bereich in jw-Bereich

$\Rightarrow$ Frequenzgang (falls Bodediagramm, direkt gegeben)

④ Anforderungen

$\rightarrow$ Phasenreserve, Bandbreite, stationärer Regelfehler, ...

$\rightarrow$ Regler auslegen

$\rightarrow$ im offenen Regelkreis $G_o(j\omega) = G_R(j\omega) \cdot \tilde{H}G(j\omega)$

$\rightarrow$ vereinfachtes Nyquist-Kriterium

⑤ in z-Bereich zurücktransformieren

Quasi-kontinuierlich, Einstellregeln

①+② $\tilde{G}_s = G_s \cdot e^{-sT_k}$

③ P-Regler nehmen, Regelkreis schließen und K_{krit}, T_{krit} berechnen. Regelkreis stabilisieren.

④ Tabelle einsetzen, K_R, T_i bestimmen

⑤ Falls erforderlich, G_R diskretisieren

Zeitdiskret, Einstellregeln

①+②+③ $HG(j\omega)$ aufstellen

④ Im Schwingversuch T_{krit}, K_{krit} bestimmen

$$T_{krit} = \frac{2\pi}{\omega_{krit}}$$

$$K_{krit} = \frac{1}{|HG(j\omega_{krit})|}$$

⑤ Tabelle einsetzen, K_R, T_i bestimmen

⑥ G_R diskretisieren

PT₂-Glieder

$$G_{PT2}(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$\Rightarrow$ Polstellen konj. komplex

$\Rightarrow$ FS

Ü6

Regler mit endlicher Einstellzeit

→ **Dead beat-Regler**: minimale Einstellzeit

► nur für **diskrete Regelstrecken**

► Führungsgröße soll nach **vorgegebener Anzahl an Schritten** erreicht werden

⊕ einfach, wenig Rechenaufwand

⊕ Regelabweichung konv. geg. 0 in endlicher Zeit

⊖ aggressive Stelleneingriffe

⊖ technische Realisierbarkeit

$$G_{ges}(z) = \frac{G_R(z) \cdot H_G(z)}{1 + G_R(z) \cdot H_G(z)} \Leftrightarrow G_R(z) = \frac{G_{ges}(z)}{H_G(z) \cdot (1 - G_{ges}(z))}$$

stabil in z-Ber.:
innerhalb von
Einheitskreis!

◉ Voraussetzung: **H_G stabil u. minimalphasig**

◉ sonst muss über $(1 - G_{ges}(z))$ ausgeklammert werden

Ü7

DGL n-ter Ordnung $\rightarrow$ n DGLs 1ter Ordnung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned}$$

Zustandsraummodell

Systemmatrix Steuermatrix
Beobachtungsmatrix Durchgangsmatrix

x = Zustandsvektor
 u = Systemeingang
 y = Systemausgang

kontinuierlich,

diskret: A_d, B_d, C_d, D_d

$D \neq 0 \Rightarrow$ System sprunghaft

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Übertragungsfkt

Lsg d. Zustandsgleichung:

$$x(t) = \underbrace{e^{At} \cdot x(0)}_{\text{Freie Bew.}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} \cdot B \cdot u(\tau) d\tau}_{\text{erzwungene Bew.}}$$

Freie Bew.
 $\rightarrow$ hängt nur von $x(0)$ ab

erzwungene Bew.
 $\rightarrow$ hängt von $u(t)$ ab

e^{At} : Fundamentalmatrix
über Laplace:

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} \{ (sI - A)^{-1} \}$$

Cayley-Hamilton

$\rightarrow$ EWs bestimmen

$$e^{s_1^* t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t) \cdot s_1^* t + \dots + \alpha_{n-1}(t) \cdot s_1^{n-1} t$$

lösen

$$e^{At} = \alpha_0(t) I + \alpha_1(t) \cdot A + \dots + \alpha_{n-1}(t) \cdot A^{n-1}$$

$\rightarrow$ Diskretisierung des ZRMs:

$$A_d = e^{AT_s}$$

$$B_d = \int_0^{T_s} e^{A(t-\tau)} \cdot B d\tau$$

$$C_d = C$$

$$D_d = D$$

Ü8

RNF: Regulationsnormalform
 BNF: Beobachtungsnormalform
 Diagonalform / Jordan-Form

} bestimmtes Verhalten
 kann einfach analysiert werden

► RNF:

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} & \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = (b_0 - b_n a_0 \quad b_1 - b_n a_1 \quad \dots \quad b_{n-1} - b_n a_{n-1}) \quad D = b_n$$

- ⊕ Regelbare Zustände sichtbar
- ⊕ Einfluss des Ausgangs sichtbar
- ⊕ Einfacher Reglerentwurf möglich

► BNF:

$$G(s) = \dots \text{anal.} \dots$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & & & -a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_0 - b_n a_0 \\ b_1 - b_n a_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_n a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \quad D = b_n$$

- ⊕ Beobachtbare Zustände sichtbar
- ⊕ Einfluss des Eingangs sichtbar
- ⊕ Einfacher Beobachterentwurf möglich

Diagonal form (allg. Jordan Form) → bei mehrfachen Polstellen

$$G(s) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s-s_i}$$

$$A = \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & s_2 & \\ & & \ddots \\ & & & s_n \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = (c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$$

⊕ Polstellen direkt sichtbar

⊕ Stabilität sichtbar

Ähnlichkeitstransformation

$$w = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i = \sum_{i=1}^n q_i \cdot v_i \quad \rightarrow \text{andere Basis } e_i \Rightarrow v_i$$

$$\begin{cases} x = T \cdot q \\ q = T^{-1} \cdot x \end{cases} \quad \text{Transformationsmatrix}$$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T$$

$$\tilde{B} = T^{-1} B$$

$$\tilde{C} = C T$$

$$\tilde{D} = D$$

neues, ähnliches System

für Übergang zu Diagonalform:

T sind EVs von A

$$(\lambda_i I - A) \cdot v_i = 0 \quad \forall i$$

Ü9

Beobachtbarkeit

(A, B, C, D) , $u(t)$, $y(t)$ bekannt $(t_0 \leq t \leq t_1)$

$\Rightarrow x(t_0)$ kann eindeutig bestimmt werden

Steuerbarkeit

äquiv.
für ZK

man kann $u(t)$ finden, was das System zu $x(t_0)$ zurückführt $(t_0 \leq t \leq t_1)$

Erreichbarkeit

analog zur Steuerbarkeit, Endzustand beliebig

Steuerbarkeitsbed. nach Kalman

$$S_c = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \text{Steuerbarkeitsmatrix}$$

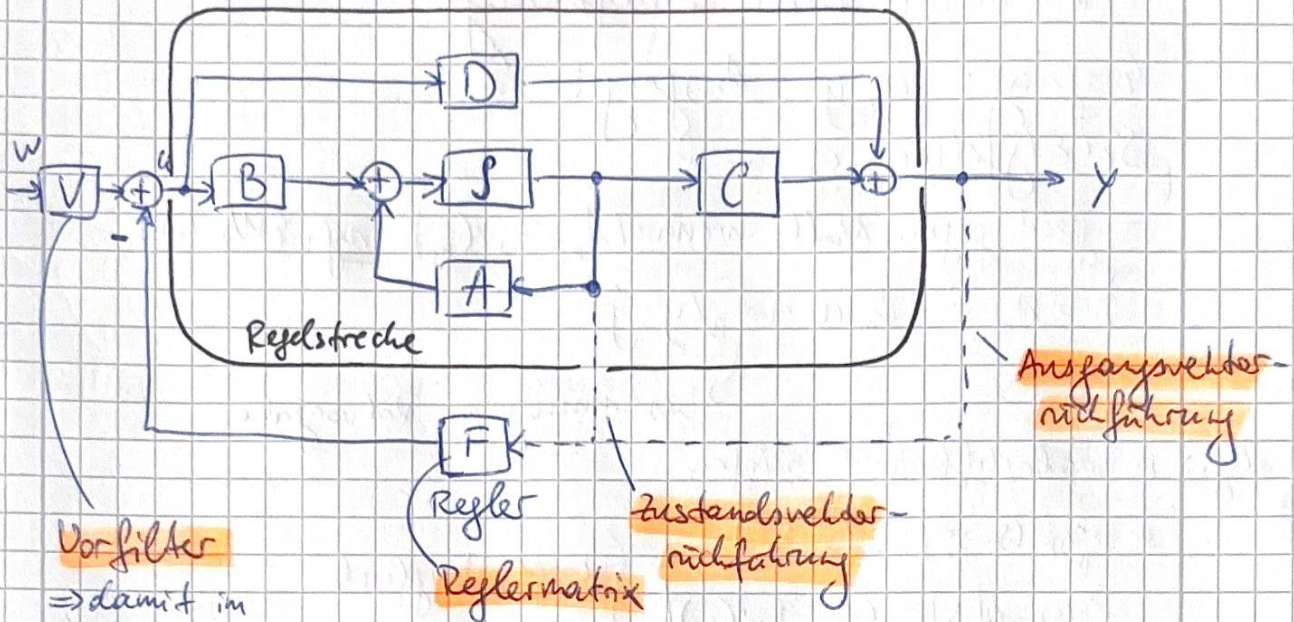
$\rightarrow$ steuerbar, wenn n l.u. Spalten $\Leftrightarrow \det \neq 0$
 $\Leftrightarrow \text{rang} = n$

Beobachtbarkeitsbed. nach Kalman

$$S_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{Beobachtbarkeitsmatrix}$$

$\rightarrow$ beobachtbar, wenn n l.u. Zeilen

Regelung: Polstellen so verschieben,
dass das System gewünschte Eigenschaften hat
"Polvorgabe"



Vorfilter

⇒ damit im

stationären Zustand $\dot{x} = 0$

$x(k+1) = x(k)$ gilt

- ▷ muss steuerbar sein
- ▷ betrachte dyn. Eigenverhalten $w(k) = 0$
- ▷ x ist hier messbar

$$\dot{x}(t) = -\frac{f^T}{\beta} x(t)$$

$$f^T = [f_1 \ f_2 \ \dots \ f_n]$$

Koeff. ges.

$$\dot{x} = Ax + bu$$

offener Regelkreis

$$\Rightarrow \dot{x} = (A - b \cdot f^T) x$$

geschl. Regelkreis

① RNF

Wunschpolynom aus PST3: $P_w(s) = p_0 + p_1 s + \dots + s^n \Rightarrow f_i = p_i - \alpha_i$

② allgemein

▷ prüfe, ob steuerbar

▷ in RNF bringen

oder
▷ $\tilde{A} = A - bf^T$, löse LGS
solange $\tilde{A}$ gew. EW, hat

$$S_{cn}^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \cdot S_c^{-1}$$

ins. St.-berücksichtigung

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} S_{cn}^T \\ S_{cn}^T \cdot A \\ S_{cn}^T \cdot A^2 \\ \vdots \\ S_{cn}^T \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$f^T = f_{RNF}^T \cdot T^{-1}$$

u
11

Zustandsbeobachter / Luenberger Beobachter

Modell des Systems $A \approx A_m, B \approx B_m, C \approx C_m$

$\Rightarrow$ Zustandsschätzung

$\Rightarrow$ Korrektur durch Rückführung

Eingang: u, y Ausgang: x

Schätzfehler: $e_x = x - \hat{x}$

$\Rightarrow$ geht gegen Null, wenn $(A_m - F_B \cdot C_m)$ neg. EWs hat

$$\dot{\hat{x}} = A_m \hat{x} + B_m u + F_B (y - \hat{y})$$

Bestimmung per Polvorgabe

allg.: $\Rightarrow$ Beobachtbarkeit prüfen

$$P_B^*(s) = (s - s_1^*) \dots (s - s_n^*)$$

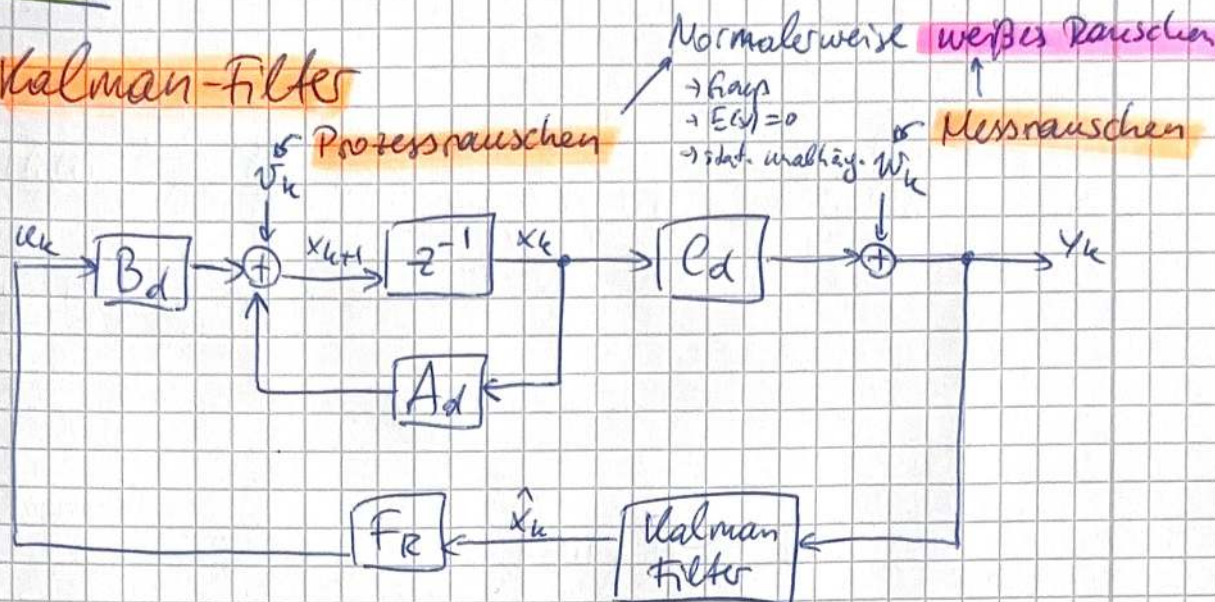
$$P_B(s) = \det(sI - (A_m - F_B \cdot C_m))$$

Koeff.-Vergleich

BNF: $\Rightarrow P_B^*(s) = p_0 + p_1 s + \dots + s^n$

$$F_B = \begin{bmatrix} p_0 - a_0 \\ p_1 - a_1 \\ \dots \\ p_{n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}$$

Kalman-Filter



- ⇒ x_k, y_k werden zu **Zufallsprozessen**
- ⇒ Kalman-Filter schätzt $x(k)$ mit min. Varianz

$$\hat{x}(k+1) = A_d \hat{x}(k) + B_d u(k) + \underbrace{K_k (y(k) - \hat{y}(k))}_{\text{Kalman Gain}}$$

Kalman Gain

1. Prädictionsschritt

rekursiv

2. Korrekturschritt

$$\begin{aligned} \hat{x}_k^- &= A_d \hat{x}_{k-1} + B_d u_{k-1} \\ \Sigma_k^- &= A_d \Sigma_{k-1} A_d^T + Q_k \end{aligned}$$

$\hat{x}_k^-$: a-priori Schätzung auf Basis des internen Modells

Σ_k^- : Kovarianzmatrix des Schätzfehlers
 $e_k = x_k - \hat{x}_k^-$
(a-priori)

$$\begin{aligned} K_k &= (\Sigma_k^- C_d^T) (C_d \Sigma_k^- C_d^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k (y_k - C_d \hat{x}_k^-) \\ \Sigma_k &= (I - K_k C_d) \Sigma_k^- \end{aligned}$$

K_k : zeitvariante Kalman-Verstärkung zur Minimierung der Varianz

$\hat{x}_k$: a-posteriori Schätzung, korrigiert durch Messwerte

Σ_k : Kovarianzmatrix des Schätzfehlers (a-posteriori)